

שאלות מסכמות ברמת בחינה

שאלות

(1) פתרו את הבעיה הבאה

$$u_x + u_y = u \quad x, y > 0$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & x > 1 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases} \quad u(0, y) = 0$$

(2) פתרו את הבעיה הבאה

$$u_{tt} = u_{xx} \quad 0 < x < \infty$$

$$u(x, 0) = f(x) = 0 \quad u_t(x, 0) = g(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$u_x(0, t) = 0$$

(3) פתרו את הבעיה

$$\Delta u = r \quad 1 < r < 2$$

$$u(1, \theta) = 1 + \sin \theta$$

$$u(2, \theta) = 1 + 2 \cos \theta$$

(4) פתרו את הבעיה הבאה

$$u_x + u_y + u = (2x+1)e^{x^2} \quad y \geq e^{-x}$$

$$u(x, e^{-x}) = e^{x^2} + e^{-x}$$

$0 < x < 1 \quad t > 0$ נתונה הבעיה הבאה בתחום (5)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 4u_x + 4u \\ u(x, 0) = x(1-x)e^{-2x}\sqrt{e} \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases}$$

הוכיחו כי $u\left(\frac{1}{2}, 1\right) < \frac{1}{4\sqrt{e}}$

רמז: הגדירו את הפונקציה $h(x, t) = u(x, t)e^{\delta x}$ עבור קבוע δ מתאים

(6) עבור איזו פונקציה $h(x)$ לפתרון של הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 10u & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = h(x) \\ u(0, t) = 0 \quad u(1, t) = 0 \end{cases}$$

הגבול $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ קיים וסופי?

(7) פתרו את הבעיה הבאה

$$\begin{cases} \Delta u = x^2 + y^2 & \text{in } x^2 + y^2 < 1 \\ u|_{x^2+y^2=1} = 1+x \end{cases}$$

והביעו את הפתרון בקוארדינטות קרטזיות

(8) נתונה משוואת הגלים הבאה

$$u_{tt} = u_{xx} \quad -\infty < x < \infty \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 1$$

$$u_t(x, 0) = g(x) = \begin{cases} 1-x^2 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

חשבו את $u(x, 1)$

9) נתונה הבעיה הבאה

$$\Delta u = 0 \quad x^2 + y^2 < 1$$

$$u|_{x^2+y^2=1} = \cosh(x) \sinh(y)$$

חשבו את $u(0,0)$

10) נתונה הבעיה הבאה

$$\Delta u = 0 \quad 1 < x^2 + y^2 < 4$$

$$u|_{x^2+y^2=1} = \ln(2+x)$$

$$u|_{x^2+y^2=4} = \ln(e^{2019} - 2 + x)$$

הוכיחו כי בתחום $1 < x^2 + y^2 < 4$ מתקיים $0 < u(x,y) < 2019$

11) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הבאה בתחום $x, y > 0$

$$x^2 u_{xx} + 2xy \cdot u_{xy} + y^2 u_{yy} = 4x^2$$

12) השתמשו באינטגרל אנרגיה כדי להראות את יחידות הפתרון לבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_{tt} + \beta \cdot u_t = u_{xx} + F(x,t) & 0 < x < L, \quad t > 0, \quad \beta > 0 \\ u_x(0,t) = A(t) & u_x(L,t) = B(t) \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

$$\text{רמז: הגדירו } E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L w_t^2(x,t) + w_x^2(x,t) dx$$

(13) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = x \\ u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 \end{cases}$$

(14) נתונה המשוואה $2u_{xx} + 2yu_{yy} + u_y = 0$ בתחום $y > 0$

- א. הראו כי המשוואה אליפטית
ב. העבירו את המשוואה לצורה קנונית

(15) פתרו את הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_u = u_{xx} + e^{-t} & 0 < x < \infty \\ u(0, t) = e^{-t} - 1 \\ u(x, 0) = 1 & u_t(x, 0) = 2 \sin(x) - 1 \end{cases}$$

(16) נתונה הבעיה

$$\begin{cases} u_u = u_{xx} & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u_x(0, t) = 0 & u_x(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = x^2(1-x) \end{cases}$$

חשבו $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^1 u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t) dx$

(17) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הבאה

$$u_{xx} - 2 \sin(x) u_{xy} - \cos^2(x) u_{yy} - \cos(x) u_y = 0$$

(18) נתונה הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_t + u_x = u_{xx} & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x, 0) = e^{\frac{1}{2}x} \\ u(0, t) = 0 & u(1, t) = 0 \end{cases}$$

חשבו $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\left(\frac{1}{4} + \pi^2\right)t} \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}x} u_t(x, t) dx$

(19) פתרו את הבעיה

$$\begin{cases} u_x + 2u_y = u & 1 + y - 2x > 0, x < 0 \\ u(x, x^2) = x + \sin(x^3) & x < 0 \end{cases}$$

(20) פתרו את הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \cos(\pi x) & 0 < x < 1, t > 0 \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 1 \\ u(x, 0) = x \end{cases}$$

רמז: התבוננו בפונקציה $v(x, t) = u(x, t) - x$

(21) נתון כי $u(r, \theta)$ היא פתרון של הבעיה הבאה

$$\begin{cases} \Delta u = 1 & 0 \leq r < 1 \\ u(1, \theta) = c + \sin(2020 \cdot \theta) \end{cases}$$

עבור איזה קבוע c מתקיים $?$ $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{u(r, \theta)}{r^2} = \frac{1}{4}$

(22) נתונות הבעיות הבאות

$$\begin{cases} \Delta u = r^2 & 0 \leq r < 1 \\ u(1, \theta) = \sin^{2019}(\theta) & 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta v = r^2 & 0 \leq r < 1 \\ v(1, \theta) = \cos^{2020}(\theta) \end{cases}$$

הוכיחו כי $u(0,0) > v(0,0)$

(23) נתון כי $u_n(r, \theta)$ זה פתרון של הבעיה הבאה

$$\begin{cases} \Delta u_n = \left(\frac{r}{2}\right)^n & 0 \leq r < 1 \\ u_n(1, \theta) = \sin(\theta) \end{cases}$$

מצאו את $u_n(r, \theta)$ וחשבו $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(r, \theta)$

(24) הוכיחו את יחידות הפתרון של בעיית החום הבאה עבור $b > 0$

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + F(x, t) & 0 < x < 1 \\ u(x, 0) = h(x) \\ v_x(0, t) - b \cdot v(0, t) = f(t) & t \geq 0 \\ u_x(1, t) + b \cdot u(1, t) = g(t) & t \geq 0 \end{cases}$$

רמז: היעזרו באינטגרל אנרגיה $E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 w^2(x, t) dx$

(25) פתרו את הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-t} \sin(\pi x) & 0 < x < 2, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(\pi x) \\ u(0, t) = 0 & u(2, t) = 0 \end{cases}$$

(26) פתרו את הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 3 \sin(2x) + \frac{\pi - x}{\pi} & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x, 0) = \frac{x}{\pi} + \sin(x) \\ u(0, t) = t \quad u(\pi, t) = 1 \end{cases}$$

רמז: הגדירו $u(x, t) = v(x, t) + t \frac{\pi - x}{\pi} + 1 \cdot \frac{x}{\pi}$

(27) פתרו את הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 1 + \sin(2\pi x) & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(\pi x) \\ u(0, t) = u(1, t) = t \end{cases}$$

רמז: כדאי להגדיר פונקציית עזר $v(x, t) = u(x, t) - t$

(28) נתונה הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \cos(x) & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = \cos(x) + \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

חשבו $\int_{-2}^2 |u(x, 3)|^2 dx$

(29) נתונה הבעיה הבאה

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x^2 + y^2 < 1 \\ u(x, y)|_{x^2+y^2=1} = x^2 + xy + y^2 \end{cases}$$

האם ייתכן כי $\iint_{x^2+y^2 < 1} u(x, y) dx dy = \frac{7\pi}{4}$?

(30) נתונה הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < 3, t > 0 \\ u(0,t) = \frac{3}{\sqrt{1+t^2}} & u(3,t) = 3 \\ u(x,0) = 3 + 3x - x^2 \end{cases}$$

הוכיחו כי $u\left(\frac{3}{2}, 1\right) < 2e$

(31) נתונה הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0,t) = \arctan(t) & u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = x(x - \pi) \end{cases}$$

הוכיחו כי $u\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) > -\frac{\pi^2}{4}$

(32) נתונה הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0 < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} & u_t(x,0) = g(x) = 0 \\ u_x(0,t) = 0 \end{cases}$$

חשבו $\int_0^2 \left| u(x,1) - \frac{1}{2} \right|^2 dx$

(33) נתונה הבעיה הבאה

$$\begin{cases} \Delta u = r & 0 \leq r < 1 \\ u(1,\theta) = \sin^{2019}(\theta) \end{cases}$$

חשבו את $u(0,0)$

תשובות סופיות

$$u(x, y) = \begin{cases} e^y & 0 < x - y < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (1)$$

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & x \geq t+1 \\ \frac{1}{2}(1-x+t) & \max\{1-t, t-1\} \leq x \leq t+1 \\ t & 0 \leq x \leq 1-t \quad (0 \leq t \leq 1) \\ 1 & 0 \leq x \leq t-1 \quad (t \geq 1) \end{cases} \quad (2)$$

$$u(r, \theta) = 1 + \frac{4}{3}r \cos(\theta) - \frac{4}{3} \frac{1}{r} \cos(\theta) - \frac{1}{3}r \sin(\theta) + \frac{4}{3} \frac{1}{r} \sin(\theta) + \frac{r^3}{9} - \frac{7}{9 \ln(2)} \ln(r) - \frac{1}{9} \quad (3)$$

$$u(x, y) = e^{x^2} + e^{-x} \quad (4)$$

(5) הוכחה

$$\int_0^1 h(x) \sin(\pi x) dx = 0 \quad \text{עבור פונקציה } h(x) \text{ המקיימת} \quad (6)$$

$$u(x, y) = \frac{15}{16} + x + \frac{(x^2 + y^2)^2}{16} \quad (7)$$

$$u(x, 1) = \begin{cases} 1 & x \geq 2 \\ 1 + \frac{2}{3} - x^2 + \frac{x^3}{3} & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 + \frac{2}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} & -2 \leq x \leq 0 \\ 1 & x \leq -2 \end{cases} \quad (8)$$

$$u(0,0) = 0 \quad (9)$$

(10) הוכחה

$$u(x,y) = 2x^2 + x \cdot f\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right) \quad (11)$$

(12) הוכחה

$$u(x,t) = \frac{L}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4L}{\pi^2(2k+1)} e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi a}{L}\right)^2 t} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{L}\right) \quad (13)$$

(14) א. הוכחה

ב. $w_{\eta\eta} + w_{\xi\xi} = 0$ כאשר $\xi = 2\sqrt{y}$, $\eta = x$

$$u(x,t) = \begin{cases} 2\sin(x)\sin(t) + e^{-t} - 1 & 0 \leq x < t \\ 1 + 2\sin(x)\sin(t) + e^{-t} - 1 & x > t \end{cases} \quad (15)$$

$$\frac{1}{105} \quad (16)$$

$$u(x,y) = F(y - \cos(x) + x) + G(y - \cos(x) - x) \quad (17)$$

$$-\frac{8}{\pi^2} \left(\frac{1}{4} + \pi^2 \right) \quad (18)$$

$$u(x, y) = e^{y-x+(1-\sqrt{1+y-2x})-(1-\sqrt{1+y-2x})^2} (1-\sqrt{1+y-2x}) + \sin\left(\left(1-\sqrt{1+y-2x}\right)^3\right) \quad (19)$$

$$u(x, t) = x + \frac{1}{\pi^2} \cos(\pi x) \left[1 - e^{-\pi^2 t}\right] \quad (20)$$

$$c = \frac{1}{4} \quad (21)$$

הוכחה (22)

$$u_n(r, \theta) = r \sin(\theta) + \frac{r^{n+2} - 1}{2^n (n+2)^2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(r, \theta) = y \quad (23)$$

הוכחה (24)

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x) + e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x) \frac{e^{(\pi^2-1)t} - 1}{(\pi^2 - 1)} \quad (25)$$

$$u(x, t) = e^{-t} \sin(x) + \frac{3}{4} \sin(2x)(1 - e^{-4t}) + t \frac{\pi - x}{\pi} + \frac{x}{\pi} \quad (26)$$

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x) + \frac{1}{4\pi^2} (1 - e^{-4\pi^2 t}) \sin(2\pi x) + t \quad (27)$$

$$\int_{-2}^2 |u(x, 3)|^2 dx = 2 + \frac{1}{2} \sin(4) \quad (28)$$

לא (29)

הוכחה (30)

הוכחה (31)

$$\int_0^2 \left| u(x,1) - \frac{1}{2} \right|^2 dx = \frac{1}{10} \quad (32)$$

$$u(0,0) = -\frac{1}{9} \quad (33)$$